

An Optimized AHP-based methodology integrated in a Decision Support System for existing buildings safety

Valentino Sangiorgio*

Highlights

This paper shows one of the first applications of the *Optimized Analytic Hierarchy processes (O-AHP)* in the field of existing R.C. buildings safety. The work discusses the methodology phases to face the problem of degradation of existing buildings that can compromise usability and user safety. For this purpose, suitable *Key Performance Indicators* are obtained to support diagnostics. In addition, the indicators are set by exploiting data available in a *Decision Support System (DSS)*. Finally, it is possible to obtain a building performance index by considering all the single surveyed pathologies.

Abstract

The large-scale management and monitoring of buildings is a complex issue for the heritage buildings holders. *Decision Support Systems (DSS)* are increasingly applied and studied in the field of building from the scientific and technical communities. *Multiple-Criteria Decision Analysis (MCDA)*, such as *Analytic Hierarchy Processes (AHP)*, are widely used in building performance analysis. On the other hand, *AHP* are difficult to apply in building field because of the complexity of the problem. This work presents an optimized approach to use *AHP* integrated in the *DSS* and applied in the field of the safety and monitoring of R.C. buildings.

Keywords

Multi-criteria decision methods, Building Pathologies, Decision Support Systems, Building Safety, Mathematical Optimization

1. INTRODUCTION

In the existent building management context at a regional scale, maintenance and monitoring activities perform a fundamental role. Pathologies related to the degradation of existing buildings can compromise usability and user safety [1]. Buildings holders need to monitor building criticalities by means of direct inspections and surveys to guarantee monitoring and safety.

In order to simplify such operations, *Decision Support Systems (DSSs)* are even more widespread to support diagnostics and building pathologies risk quantification. In such system the mathematical tool used to quantify building damages is crucial in order to obtain the useful information in the decision support [2].

Valentino Sangiorgio

Politecnico di Bari, via Edoardo
Orabona 4, Bari, 70126, Italia

* Corresponding author

e-mail:

valentino.sangiorgio@poliba.it

A tool applied in many field is the *Analytic Hierarchy Process (AHP)* by which it is possible analyse different variables. The *AHP* is based on the decomposition of the problem into independent criteria: such an operation allows transforming a multidimensional scaling problem into a one-dimensional scaling problem. Such characteristics make the *AHP* particular effective to analyse problem in the field of existing building.

In particular, every criterion is analysed individually to identify the related Priority Vector by which it is possible to derive weight of each criterion and alternative [3]. The *AHP* identifies such *Priority Vector* from the *matrix of judgements*, that is a matrix generated by the comparison in pairs of each alternative or criterion [4][5]. In addition, the *AHP* quantifies the coherence of the assigned judgments and the reliability of obtained weights through the analysis of the consistency of the *matrix of judgements*, defined by Saaty [6] [7] [8]. However, *AHP* has some limits: mathematical and psychology studies determined that the human mind is limited to 7 ± 2 alternatives in simultaneous comparison and this limit prevents achievement of judgments consistency [9]. Consequently, the reliability of the results decreases as long as the number of criteria of comparison to obtain matrix of judgements becomes large. To this aim, it is particularly important to study methodologies that are able to improve the consistency of judgments [10] by transforming an inconsistent matrix into a consistent one [6] [3]. The main objective of this work is to apply a methodology that overcomes the limits of the classical *AHP*. To this aim, the main steps of the classical *AHP* to determine the *matrix of judgments* are re-elaborated in the *Optimized-AHP (O-AHP)* procedure. In particular, it is possible to set up a mathematical optimization for the detection of a consistent matrix of judgments by defining a set of inequalities that substitute the judgment scale proposed by Saaty. In such a way, the *Decision Maker (DM)* can use just a range of judgments and focus on the main judgments instead of carrying out all of the pairwise comparisons. This approach can be useful in complex problems, when the decision maker does not have full system knowledge. From a mathematical point of view, a *Mathematical Programming (MP)* problem is formalized to deal with the inconsistency of the judgment matrix by minimizing the inconsistency performance index, subject to the inequalities imposed by the *DM*. Hence, the applied methodology allows overcoming the limit of the 7 ± 2 alternatives of the simultaneous comparison to reach consistent result. The *O-AHP* is applied to data obtained from *DSS* for monitoring on a territorial scale [11] in order to quantify the influence of building pathologies, with resulting detachment, fall of elements or collapse of the element itself, in building safety.

1. INTRODUZIONE

Nel campo della gestione in sicurezza degli edifici esistenti su larga scala, manutenzione e attività di monitoraggio svolgono un ruolo fondamentale. Numerose patologie legate al degrado degli edifici possono compromettere il normale utilizzo dell'edificio e nei casi più gravi la sicurezza dello stesso [1]. I gestori del patrimonio costruito hanno la necessità di commissionare diversi sopralluoghi e ispezioni per garantire il monitoraggio e la sicurezza. Per semplificare tali operazioni sono sempre più diffusi sistemi informativi che offrono un supporto nella diagnostica e nella quantificazione del rischio delle patologie. Per tali sistemi diventa di cruciale importanza il modello matematico utilizzato per quantificare i danni degli edifici al fine di fornire indicazioni utili nel supporto delle decisioni [2].

Uno strumento di grande applicazione in molteplici campi in cui è possibile analizzare diverse grandezze e variabili è l'*Analytic Hierarchy Process (AHP)*. L'*AHP* si basa sulla decomposizione del problema in singoli criteri indipendenti: tale operazione permette di trasformare un problema multidimensionale in più problemi monodimensionali. Tale caratteristica rende l'*AHP* particolarmente efficace nella scomposizione delle problematiche nel campo degli edifici esistenti.

Più precisamente ogni criterio è analizzato singolarmente per identificare i relativi *Priority Vector*, da cui si ricavano i pesi per ogni alternativa o per ciascun criterio [3]. L'*AHP* identifica tale *priority vector* dalle *matrix of judgements*, ovvero matrici generate dal confronto a coppie di ogni alternativa o criterio [4][5]. Inoltre nell'*AHP* attraverso l'analisi della consistenza, definita da Saaty, delle *matrix of judgements* è possibile quantificare matematicamente la coerenza dei giudizi assegnati e l'affidabilità dei pesi così ottenuti [6] [7] [8].

L'*AHP* tuttavia possiede dei limiti: alcuni studi di matematici e psicologici hanno determinato che la mente umana è limitata a 7 ± 2 alternative nel confronto simultaneo ed il superamento di questo limite impedisce di ottenere la consistenza [9]. Di conseguenza l'affidabilità dei risultati diminuisce al crescere del numero di elementi del confronto a coppie utilizzati per generare le *matrix of judgements*. A questo scopo, è particolarmente interessante studiare metodologie in grado di migliorare la consistenza e quindi l'affidabilità del metodo [10] che trasformano una matrice incoerente in una coerente [6] [3].

L'obiettivo principale di questo lavoro è applicare una metodologia in grado di superare i limiti del metodo classico dell'*AHP* all'analisi prestazionale degli edifici. A questo scopo, i passaggi principali per determinare la *matrix of judgements* del metodo classico sono rielaborati nella procedura *Optimized-AHP (O-AHP)*. In particolare, attraverso la definizione di una serie di disuguaglianze che sostituiscono la scala di giudizio proposto da Saaty è possibile impostare una ottimizzazione matematica per l'individuazione di

2. THE CLASSIC AHP METHOD AND THE APPLICABILITY LIMITS

The proposed *O-AHP* follows the footsteps of the well know standard *AHP* four steps [12] by operating on its mathematical formulas and by proposing the improvement of weights evaluation. To this aim the two main steps of standard *AHP* are described in this section: *problem structuring* and *weights evaluation*. Starting from a decision problem, the first step consists in structuring the problem according to a hierarchical scheme, in order to provide a detailed, simple, systematic and structured decomposition of the general problem into its basic components.

To this aim, the goal of the *AHP* is identified and the related criteria, sub-criteria and alternatives to reach the goal are determined (Fig. 1). This analysis of the problem allows studying each aspect of the decision problem individually. This approach is particular effective in the performance analysis of the building sector.

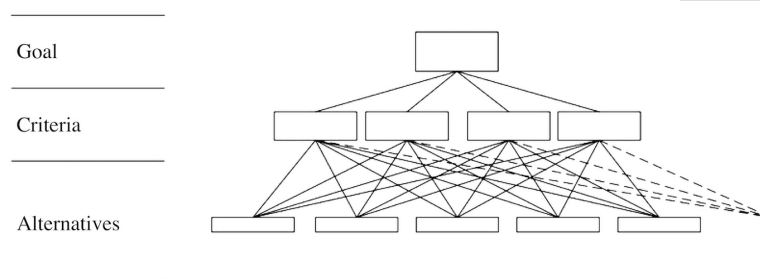


Figure 1. Structuring of a generic problem in a hierarchical scheme.

The second step of weight evaluation is the core of the method and provides the weights that are necessary for generating the ranking. In this phase the classical method presents the most evident limits in the application to the building field in which a large number of components are compared. More precisely, in this phase the matrix of judgments and the relative weights are determined.

Considering n ordered criteria of comparison (i.e., criteria, sub-criteria or alternatives in relation with criteria or sub-criteria), a $n \times n$ judgments matrix A is defined (Fig. 2), where each upper diagonal element $a_{ij} > 0$ is generated by comparing the i -th element with the j -th one through the fundamental scale of absolute numbers.

This semantic scale is composed by verbal scales that are associated to numerical values (1, 3, 5, 7, 9) and compromises (2, 4, 6, 8) between such values (Fig. 3) [13].

una matrix of judgements consistente. Attraverso tale approccio il Decision Maker (DM) invece di effettuare tutti i confronti a coppie può omettere i giudizi su cui è incerto e concentrarsi sui giudizi principali. Tale approccio è utile in sistemi vasti o quando il DM non ha piena conoscenza del problema. Dal punto di vista matematico un problema di programmazione matematica (MP) è formalizzato al fine di minimizzare l'inconsistenza della matrix of judgements, rispettando le disuguaglianze imposte sui giudizi dal DM. Pertanto, la metodologia applicata permette di superare il limite delle 7 ± 2 alternative del confronto simultaneo e raggiungere anche in tali casi un risultato coerente. In questo lavoro l'O-AHP è applicato ai dati ottenuti da un DSS per il monitoraggio su scala territoriale [11] al fine di quantificare in quale misura una patologia edilizia comporta la compromissione della sicurezza dovuto al distacco, alla caduta di elementi o al collasso dell'elemento stesso.

2. IL METODO DELL'AHP CLASSICO ED I LIMITI DI APPLICABILITÀ

La metodologia O-AHP, segue le

orme dell'AHP classico [12] ed opera sulle sue formule matematiche proponendo il miglioramento della valutazione dei pesi. A questo scopo sono descritte in questa sezione le due fasi principali dell'AHP classico utilizzate nella metodologia proposta: la strutturazione del problema e la valutazione dei pesi. Partendo da un problema di decisione, il primo passo consiste nello strutturare il problema secondo uno schema gerarchico, al fine di fornire una dettagliata e semplice decomposizione del problema nelle sue fondamentali componenti. A questo scopo, si identifica l'obiettivo dell'AHP ed i relativi criteri, eventuali sotto-criteri e alternative come è schematizzato in Fig. 1. Tale scomposizione del problema consente di analizzare singolarmente ogni aspetto dell'argomento ed è particolarmente utile per la quantificazione delle prestazioni nel campo dell'edilizia. La seconda fase di valutazione dei pesi è la parte centrale del metodo, e fornisce i valori numerici necessari per generare degli indici di performance. In tale fase il metodo classico presenta i limiti più evidenti nell'applicazione all'edilizia in cui si confronta un gran

A	1	2	...	n
1	1	$a_{1,2}$...	$a_{1,n}$
2	$1/a_{1,2}$	1	...	$a_{2,n}$
...	1	...
n	$1/a_{1,n}$	$1/a_{2,n}$...	1

Figure 2. Generic matrix A.

Number value a_{ij}	Verbal scale
$a_{ij} = 1$	Equal importance
$a_{ij} = 3$	Moderate importance of one over another
$a_{ij} = 5$	Strong importance
$a_{ij} = 7$	Very strong importance
$a_{ij} = 9$	Extreme importance
1,5 - 4 - 6 - 8	Intermediate value
1/9, 1/8, ..., 1/2	The reciprocal number ex-press an opposite judgement

Figure 3. Fundamental scale of absolute numbers of Saaty.

Once *matrix of judgements* is obtained, in the standard AHP, the weights are obtained by solving the following eigenvector problem:

$$(1) \quad A w = \lambda_{max} w,$$

where w is the priority vector and λ_{max} is the principal eigenvalue. Operatively, approximate formulation methods are used in order to calculate the weights from the judgments matrix [14].

The AHP method allows identifying the consistency, and consequently the reliability of the weights obtained, through a numerical index: the *consistency index CI*, defined by Saaty [12] as follows:

$$(2) \quad CI = \frac{\lambda_{max} - n}{n - 1}.$$

In order to provide a measure of the inconsistency that is independent of the matrix order, Saaty [8] proposed the *Consistency Ratio (CR)*. This is obtained by considering the ratio between *CI* and its expected value (*Random Consistency Index - RI*) determined over a large number of positive reciprocal matrices of order n , whose entries are randomly chosen in the set of values $n \in \{1, 2, \dots, 10\}$

$$(3) \quad CR = CI/RI(n).$$

numero di componenti.

Più precisamente in questa fase si determinano le *matrix of judgements* ed i relativi pesi. Per generare la singola *matrix of judgements* si considerano n elementi di confronto (tali elementi possono essere tutti i criteri, o tutti i sottocriteri o tutte le alternative di un sottocriterio). La generica *matrix of judgements* A (Fig. 2) $n \times n$ (dove n rappresenta il numero degli elementi del confronto) viene generata confrontando l'elemento i -esimo con il j -esimo attraverso la scala fondamentale di Saaty. Tale scala semantica è composta da giudizi verbali a cui sono associati valori numerici (1, 3, 5, 7, 9), inoltre sono presenti anche valori intermedi tra i giudizi verbali (2, 4, 6, 8) (Fig. 3) [13]. Inoltre per generare la matrice è sufficiente identificare ogni elemento superiore alla diagonale $a_{ij} > 0$.

Una volta identificata la *matrix of judgements*, nella versione classica dell'AHP i pesi sono ottenuti risolvendo il seguente problema di autovettori:

$$A w = \lambda_{max} w \quad (1)$$

dove w è il priority vector e λ_{max} è l'autovalore principale. Nelle applicazioni convenzionali sono sufficienti dei metodi semplificati che consentono la risoluzione di tale problema di autovettori senza commettere errori rilevanti [14]. Il metodo AHP consente inoltre di identificare la coerenza dei giudizi assegnati a cui è legata l'affidabilità dei pesi ottenuti attraverso un indice numerico: l'indice di inconsistenza, ovvero il *consistency index CI*, definito da Saaty [12] come segue:

$$CI = (\lambda_{max} - n) / (n - 1). \quad (2)$$

Per ottenere un indice che quantifichi l'inconsistenza indipendentemente dall'ordine della matrice, è definito da Saaty il *Consistency Ratio (CR)*.

In this paper, in order to face a large number of alternatives, it is necessary to consider values of $RI(n)$ for $1 \leq n \leq 15$. Hence, among the different values of RI proposed in the related literature, the values of Noble [15] are used (Fig. 4).

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
RI	0	0	0.49	0.82	1.03	1.16	1.25	1.31	1.36	1.39	1.42	1.44	1.46	1.48	1.49

Figure 4. Random consistency index di Noble.

On the basis of several empirical studies, Saaty [8] concludes that the value of *Consistency Ratio* $CR < 0.10$ is acceptable. Such a test about CR is crucial for establishing the reliability of assigned judgments and it is the parameter that mathematically determines the incoherence of the decision maker judgments. In the building sector, a large number of elements is used: this situation leads to unsatisfied consistency requirement of the comparison in most cases.

3. THE OPTIMIZED AHP PROCEDURE FOR WEIGHT CALCULATION

In order to overcome the consistency issue of *AHP* for problems with a large number of criteria or alternatives, the *Optimized AHP (O-AHP)* methodology for generating the *judgement matrix A* is proposed. In particular, the presented method focuses on the second step of *AHP*, i.e., the optimized weights evaluation. The methodology can be described by considering three main phases: phase 1) *rough ranking evaluation* of the alternatives; phase 2) determination of a set of *judgment ranges*; phase 3) MP formulation of the *O-AHP*.

3.1 JUDGEMENT RANGES EVALUATION

In some cases, it is useful to preliminarily assume an approximate ranking of the criteria of comparison. To this aim, such criteria can be positioned starting from the first rows and columns of the *judgment matrix A* in descending order of importance: this optional operation can simplify the subsequent steps.

Secondly, unlike the Saaty method, in which the *DM* performs the judgment by a crisp number, in the *O-AHP* method the decision maker expresses a judgement range, i.e., the range in which the judgement is assumed to belong. *Judgement range* setting is formalized through inequalities, by proposing two new semantic ranges of the *O-AHP*, inspired by the fundamental scale of absolute numbers of Saaty: the *O-AHP semantic ranges of the lower bounds* (Fig. 5) and the *O-AHP semantic ranges of the upper bounds* (Fig. 6).

Questo si ottiene considerando il rapporto tra CI e il suo valore atteso di *Random consistency Index* RI , determinato su un grande numero di matrici reciproche positive di ordine n ,

i cui elementi sono scelti casualmente nel set di valori $n \in \{1, 2, \dots, 15\}$:

$$CR = CI/RI(n). \quad (3)$$

I valori di RI sono quindi dei dati noti grazie a numerosi studi presenti in letteratura. In questo lavoro sono stati scelti i valori determinati dallo studio di Noble [15] (Fig. 4).

Sulla base di numerosi studi empirici, Saaty [12] ha concluso che per valori di $CR < 0.10$ il risultato della matrice A è accettabile. Tale test del CR è cruciale per stabilire la coerenza e l'affidabilità dei pesi ottenuti. Nelle applicazioni del metodo all'edilizia a causa dell'elevato numero di elementi del confronto si incorre molto spesso in problemi di verifica non soddisfatta.

3. LA PROCEDURA AHP OTTIMIZZATA PER IL CALCOLO DEI PESI

Per superare il problema della consistenza dell'*AHP* ed al fine di applicare il metodo anche a problemi con un gran numero di elementi, si utilizza la metodologia *Optimized-AHP (O-AHP)* [16]. Tale metodo ottimizza la seconda fase dell'*AHP* classico, cioè la valutazione dei pesi per essere applicabile nel caso della valutazione prestazionale degli edifici esistenti.

L'*O-AHP* si articola in due fasi principali: la valutazione sommaria del ranking delle alternative e stima dei *Judgement Range* e la formulazione matematica del *O-AHP*.

3.1. LA STIMA DEI JUDGEMENT RANGES

In alcune applicazioni può essere utile assumere preliminarmente una classifica approssimativa degli elementi di confronto. A questo scopo, gli elementi sono posizionati dal *DM* a partire dalle prime righe e colonne della matrix of judgements A in ordine decrescente di importanza: questa operazione facoltativa può semplificare le fasi successive di assegnazione del *judgement ranges*.

In secondo luogo, il *DM* non esprime i giudizi attraverso l'individuazione di valori numerici precisi, ma attraverso degli intervalli di valori in cui sicuramente ricade il giudizio nominati *judgement ranges (JR)*. L'assegnazione dei *JR* è formalizzata attraverso delle disuguaglianze identificate utilizzando le due nuove scale fondamentali dell'*O-AHP*: i *semantic ranges of the lower bounds* (Fig. 5.) e i *semantic ranges of the upper bounds* (Fig. 6.).

I range semantici dell'*O-AHP* sono

Lower bound constraint K_{ij}^L	Verbal constraint
$a_{ij} \geq 1$	Equal or more importance of i over j
$a_{ij} \geq 3$	More importance, even slightly, of i over j
$a_{ij} \geq 5$	At least moderate importance of i over j
$a_{ij} \geq 7$	At least strong importance of i over j
$a_{ij} \geq 9$	At least very strong importance of i over j
1,5 - 4 - 6 - 8	Intermediate values
$a_{ij} < 1/9, 1/8, \dots, 1/2$	The reciprocal number to the " \leq " sign expresses an opposite judgment (becomes upper bound)

Figure 5. Optimized-AHP Semantic Ranges of the Lower Bounds.

Upper-bound constraint K_{ij}^U	Verbal constraint
$a_{ij} \leq 3$	The importance of i over j does not exceed the "moderate importance"
$a_{ij} \leq 5$	The importance of i over j does not exceed the "strong importance"
$a_{ij} \leq 7$	The importance of i over j does not exceed the "very strong importance"
$a_{ij} \leq 9$	The importance of i over j does is not the Max importance
1,5 - 4 - 6 - 8	Intermediate values
$a_{ij} > (1/9, 1/8, \dots, 1/2)$	The reciprocal number the greater-than sign express an opposite judgement (Becomes lower bond)

Figure 6. Optimized-AHP Semantic Ranges of the Upper Bounds.

The *Semantic Ranges* of the *O-AHP* are defined by following the footsteps of the fundamental scale of absolute numbers of Saaty, but unlike the Saaty method in which the *DM* has to express a precise judgment, in the *O-AHP* method the *DM* determines the *JR* and can omit judgments in cases of particularly difficult choice.

3.2 THE MATHEMATICAL FORMULATION OF THE O-AHP

The objective of the *MP* problem [16] is to determine the elements of the judgment matrix A on the basis of the inequalities assigned in phase 2.

To this aim, the sets of pairs of sub-criteria that are subject to the *judgement range* inequalities are defined as follows:

$C^L = \{(i,j) \mid a_{ij} > K_{ij}^L \text{ with } i < j\}$ set of pairs of sub-criteria involved in lower bound inequalities,

$C^U = \{(i,j) \mid a_{ij} \leq K_{ij}^U \text{ with } i < j\}$ set of pairs of sub-criteria involved in upper bound inequalities,

where K_{ij}^L and K_{ij}^U are the values assigned by the *decision maker* to the lower and upper bound inequalities, respectively, as detailed in Fig. 5 and Fig. 6.

Hence, it is possible to specify the entries of A by the following set $\Gamma(A)$ of mathematical constraints:

$\Gamma(A)$:

$$a_{ij} = 1 \quad \text{for } i, j = 1, \dots, n \text{ with } i = j \quad (4a)$$

ottenuti seguendo le orme della scala fondamentale di Saaty, ma a differenza del metodo classico, in cui il *DM* deve esprimere un giudizio preciso, nel metodo *O-AHP* il *DM* determina degli intervalli e può omettere i giudizi nei casi in cui risulti particolarmente difficile la scelta.

3.2. LA FORMULAZIONE MATEMATICA DELL'O-AHP

La programmazione matematica utilizzata [16] consiste nella determinazione degli elementi della matrice A sulla base delle disequazioni ottenute tramite i *JR* minimizzando l'inconsistenza della matrice CI . Si assume che precedentemente il *DM* abbia determinato i seguenti insiemi di coppie soggetti alle disequazioni [16]:

$C^U = \{(i,j) \mid a_{ij} \leq K_{ij}^U\}$ insieme di elementi coinvolti nelle disequazioni rappresentanti il limite superiore con $i < j$,

$C^L = \{(i,j) \mid a_{ij} \geq K_{ij}^L\}$ insieme di elementi coinvolti nelle disequazioni rappresentanti il limite superiore con $i > j$,

dove K_{ij}^U and K_{ij}^L sono rispettivamente i valori dei vincoli superiori e inferiori assegnati dal *DM* attraverso le Fig. 5 e Fig. 6.

È possibile quindi definire gli elementi di A attraverso l'insieme $\Gamma(A)$ dei vincoli matematici [16]:

$\Gamma(A)$:

$$a_{ij} = 1 \text{ per } i, j = 1, \dots, n \text{ con } i = j \quad (4a)$$

$$1/9 < a_{ij} < 9 \text{ per } i, j = 1, \dots, n \text{ con } i < j \quad (4b)$$

$$1/9 < a_{ij} < 9 \quad \text{for } i,j=1,\dots,n \text{ with } i < j \quad (4b)$$

$$a_{ij} \leq K_{ij}^U \quad \text{for } (i,j) \in C^U \quad (4c)$$

$$a_{ij} > K_{ij}^L \quad \text{for } (i,j) \in C^L \quad (4d)$$

$$a_{ij} = 1/a_{ji} \quad \text{for } i,j=1,\dots,n \text{ with } i > j. \quad (4e)$$

In particular, constraints (4a), (4b) and (4e) are derived from the matrix A definition and constraints (4c) and (4d) are determined by the *decision maker*.

Now, in order to calculate a *judgment matrix* that exhibits low consistency index, the following *MP* problem is formulated:

$$\min CI(A) \quad (5a)$$

$$\text{subject to } \Gamma(A). \quad (5b)$$

Where the value of CI is calculated according to (2).

The optimized *matrix of judgments* A' and a'_{ij} is obtained by solving the *MP* (5a-b).

The matrix consistency and in particular the relative optimized weights w' are obtained by solving the problem (1) as the classical method.

The methodological simplifications of the proposed *O-AHP* are the following:

1. the judgments necessary to obtain the entries of A are not determined by single values of comparison but they are expressed by a set of ranges;
2. the consistency of matrix A is not obtained through a trial and error method as in the standard *AHP*, but it is optimized by the solution of the *MP* problem, improving the coherence of the judgments.

These features make the *O-AHP* method effective even when the number of comparisons becomes greater than 10.

4. APPLICATION OF THE *O-AHP* IN THE *DSS*

In this section the *O-AHP* methodology [16] is applied to quantify safety by comprising the identification of the building pathologies through the structure of the problem and the identification of criteria and alternatives weights.

In particular, the criteria and the alternatives are set by considering the data available in the *DSS* [11].

The considered criteria are: *i) pathology severity; ii) pathology extension* compared to the element dimension; *iii) and criticality height above walking surface*.

Fig. 7 schematizes the decomposition of the problem into criteria and alternative according to a hierarchical scheme.

The weights evaluation is performed starting from the alternatives of the criterion *Severity of pathology*. A rough ranking evaluation is carried out and the *JRs* are evaluated by use the fundamental scales of *O-AHP*. (Fig. 5 and 6).

$$a_{ij} \leq K_{ij}^U \text{ per } (i,j) \in C^U \quad (4c)$$

$$a_{ij} > K_{ij}^L \text{ per } (i,j) \in C^L \quad (4d)$$

$$a_{ij} = 1/a_{ji} \text{ per } i,j=1,\dots,n \text{ con } i > j \quad (4e)$$

In particolare, i vincoli (4a), (4b) e (4e) derivano dalla definizione e dalle proprietà della matrice A e i vincoli (4c) e (4d) sono quelli identificati dal *DM* attraverso i *JR*.

Al fine di calcolare una *matrix of judgments* con un basso valore di *CI* si formula il seguente problema di *Mathematical Programming* (*MP*):

$$\min CI(A) \quad (5a)$$

$$\text{soggetto a } \Gamma(A) \quad (5b)$$

dove il valore CI è calcolato con la formula (2).

La *matrix of judgments* ottimizzata A' , con elementi a'_{ij} , è ottenuta risolvendo il problema *MP* (5a-b). Analogamente al metodo classico, si ottengono i parametri di consistenza della matrice e in particolare i relativi pesi ottimizzati w' risolvendo il problema (1).

I vantaggi della metodologia proposta sono i seguenti:

1. i giudizi necessari per ottenere tutti gli elementi di A sono espressi solo dai vincoli su un insieme di elementi di A sulla base della conoscenza solida del *DM* del problema, quindi non è più necessario esprimere giudizi precisi;
2. la consistenza della matrice A non è ottenuta in una procedura per tentativi ma risolvendo un problema matematico di ottimizzazione che ha come obiettivo la massimizzazione della coerenza dei giudizi.

Tali caratteristiche rendono utilizzabile il metodo *O-AHP* anche quando il numero dei confronti diventa superiore a 10.

4. L'APPLICAZIONE DELL'*O-AHP* AL CASO DI UN *DSS*

In questa sezione si applica la metodologia dell'*O-AHP* [16] per quantificare la misura in cui le patologie edilizie di edifici a scheletro indipendente comportano la compromissione della sicurezza attraverso l'identificazione dei pesi dei criteri e delle alternative. In particolare, i criteri e le alternative sono impostati considerando i dati che il *DSS* è in grado di ottenere [11].

L'obiettivo definito nella strutturazione del problema è quantificare la compromissione della sicurezza dovuta al distacco, alla caduta di elementi o al collasso dell'elemento stesso. I criteri considerati per il raggiungimento dell'obiettivo sono: *i) la gravità della patologia, ii) l'estensione della patologia, iii) e l'altezza della criticità rispetto al piano di calpestio*. In Fig. 7 si schematizza la scomposizione del problema nei criteri e nelle relative alternative secondo un modello gerarchico.

In particular the upper bound K_{ij}^U and the lower bound K_{ij}^L are defined. We proceed by imposing constraints for the matrix A'_1 (Fig. 8), and the uncertain judgments are omitted. Consequently, JRs are determined and shown schematically in Fig. 9.

In the next phase the problem is formalized through the mathematical constraints expressed in (4a) (4b) (4c) (4d) (4e). The constraints K_{ij}^U e K_{ij}^L are showed in Fig. 9.

Fig. 8 shows the solution of the optimization problem (5a-b) that provides the optimized matrix of judgment A'_1 . In addition, by solving the eigenvalues problem (1) [13] the optimized and normalized weights w'_1 are obtained.

The optimized matrix A'_1 respects the consistency requirement of $CR' = 0.0174 < 0.1$ and values of matrix A'_1 result coherent according to the Saaty theory.

La valutazione dei pesi è eseguita partendo dalle alternative del criterio Gravità della patologia, si effettua quindi una valutazione sommaria del ranking per poi andare ad individuare i JR tramite le scale fondamentali dell'O-AHP (Fig. 5 e Fig. 6) e conseguentemente il vincolo superiore K_{ij}^U ed il vincolo inferiore K_{ij}^L . Si procede imponendo vincoli per la matrice A'_1 (Fig. 8) omettendo i giudizi per cui non si possiede la certezza. Si determinano così i JR schematizzati in Fig. 9. Nella fase successiva si formalizza il problema attraverso i vincoli matematici espressi in (4a) (4b) (4c) (4d) (4e) dove K_{ij}^U e K_{ij}^L sono mostrati in Fig. 9. La Fig. 8 mostra la soluzione del problema di ottimizzazione (8a-b), che fornisce la matrice ottimizzata del giudizio A'_1 . Attraverso la risoluzione del problema di autovettori nel metodo classico (1) [13], si ottengono i pesi ottimizzati e normalizzati a $10 w'_1$. La matrice ottimizzato A'_1 rispetta i limiti di consistenza, ovvero CR'

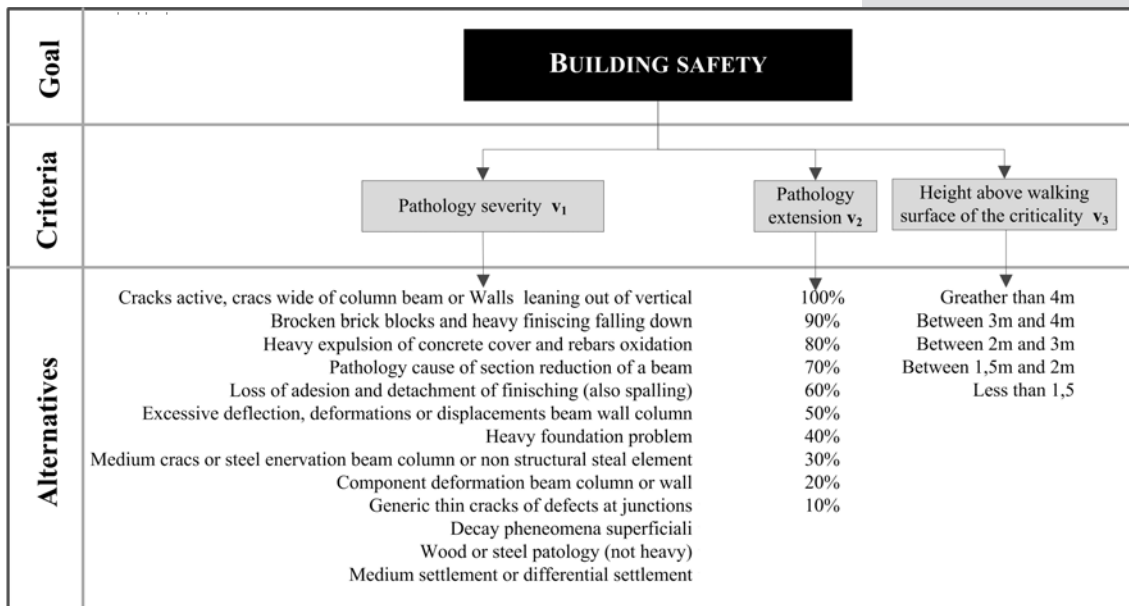


Figure 7. Hierarchical structuring of the problem.

Matrix of comparison Criterion: Severity of pathology

	Cracks active, cracs wide of column beam or Walls leaning out of vertical	Broken brick blocks and heavy finiscing falling down	Heavy expulsion of concrete cover and rebars oxidation	Pathology cause of section reduction of a beam	Loss of adesion and detachment of finiscing (also spalling)	Excessive deflection, deformations or displacements beam wall column	Heavy foundation problem	Medium cracs or steel enervation beam column or non structural steal element	Component deformation beam column or wall	Generic thin cracks of defects at junctions	Decay pheomena superficiali	Wood or steel pathology (not heavy)	Medium settlement or differential settlement	w'_1	CR
Cracks active, cracs wide of column beam or Walls leaning out of vertical	1	1.05	2	2	3	3	3	6	6.07	9	9	9	9	10.00	
Broken brick blocks and heavy finiscing falling down	0.95	1	2	2	3	3	3	2.54	2.52	5.03	5.77	9	9	9	9.51
Heavy expulsion of concrete cover and rebars oxidation	0.50	0.50	1	1.06	3	3	3	1.87	3.69	4.27	9	9	7.15	6.71	7.07
Pathology cause of section reduction of a beam	0.50	0.50	0.95	1	2	2	3	3.51	4.05	9	8.66	6.78	6.36	6.67	6.67
Loss of adesion and detachment of finiscing (also spalling)	0.33	0.33	0.33	0.50	1	1	1	3	2.14	5.08	4.55	3.57	3.35	3.52	3.52
Excessive deflection, deformations or displacements beam wall column	0.33	0.39	0.33	0.50	1.00	1	1	3	3	5.36	4.8	3.77	3.54	3.74	3.74
Heavy foundation problem	0.33	0.40	0.53	0.33	1.00	1.00	1	3	3	5.4	4.84	3.8	3.57	3.77	3.77
Medium cracs or steel enervation beam column or non structural steal element	0.17	0.20	0.27	0.29	0.33	0.33	0.33	1	1.15	5	5	1.91	1.8	2.01	2.01
Component deformation beam column or wall	0.16	0.17	0.23	0.25	0.47	0.33	0.33	0.87	1	4	2.12	1.67	1.57	1.67	1.67
Generic thin cracks of defects at junctions	0.11	0.11	0.11	0.11	0.20	0.19	0.19	0.20	0.25	1	1	0.7	0.66	0.72	0.72
Decay pheomena superficiali	0.11	0.11	0.11	0.12	0.22	0.21	0.21	0.20	0.47	1.00	1	1	0.74	0.80	0.80
Wood or steel pathology (not heavy)	0.11	0.11	0.14	0.15	0.28	0.26	0.26	0.52	0.60	1.43	1.00	1	1	0.98	0.98
Medium settlement or differential settlement	0.11	0.11	0.15	0.16	0.30	0.28	0.28	0.56	0.64	1.52	1.36	1.00	1	1.04	1.04

Figure 8. Matrix of judgement A'_1 optimized for the alternatives of the criterion Severity of pathology.

i-th element	K_i	a_i	K_i'	j-th element
Cracks active, cracs wide of column beam or Walls leaning out of vertical	1	$a_{1,2}$	2	Broken brick blocks and heavy finiscing falling down
Cracks active, cracs wide of column beam or Walls leaning out of vertical	2	$a_{1,3}$	3	Heavy expulsion of concrete cover and rebars oxidation
Cracks active, cracs wide of column beam or Walls leaning out of vertical	2	$a_{1,4}$	3	Pathology cause of section reduction of a beam
Cracks active, cracs wide of column beam or Walls leaning out of vertical	3	$a_{1,5}$	4	Loss of adesion and detachment of finiscing (also spalling)
Cracks active, cracs wide of column beam or Walls leaning out of vertical	3	$a_{1,6}$	4	Excessive deflection, deformations or displacements beam wall column
Cracks active, cracs wide of column beam or Walls leaning out of vertical	3	$a_{1,7}$	4	Heavy foundation problem
Cracks active, cracs wide of column beam or Walls leaning out of vertical	6	$a_{1,8}$	9	Medium cracs or steel enervation beam column or non structural steal element
Cracks active, cracs wide of column beam or Walls leaning out of vertical	5	$a_{1,9}$	9	Component deformation beam column or wall
Cracks active, cracs wide of column beam or Walls leaning out of vertical	8.0	$a_{1,10}$	9	Generic thin cracks of defects at junctions
Cracks active, cracs wide of column beam or Walls leaning out of vertical	8.0	$a_{1,11}$	9	Decay phenomena superficiali
Cracks active, cracs wide of column beam or Walls leaning out of vertical	9.0	$a_{1,12}$	9	Wood or steel patology (not heavy)
Cracks active, cracs wide of column beam or Walls leaning out of vertical	9.0	$a_{1,13}$	9	Medium settlement or differential settlement
Broken brick blocks and heavy finiscing falling down	2.0	$a_{2,3}$	3	Heavy expulsion of concrete cover and rebars oxidation
Broken brick blocks and heavy finiscing falling down	2.0	$a_{2,4}$	5	Pathology cause of section reduction of a beam
Broken brick blocks and heavy finiscing falling down	3.0	$a_{2,5}$	5	Loss of adesion and detachment of finiscing (also spalling)
Heavy expulsion of concrete cover and rebars oxidation	1.0	$a_{3,4}$	3	Pathology cause of section reduction of a beam
Heavy expulsion of concrete cover and rebars oxidation	3.0	$a_{3,5}$	6	Loss of adesion and detachment of finiscing (also spalling)
Heavy expulsion of concrete cover and rebars oxidation	3.0	$a_{3,6}$	6	Excessive deflection, deformations or displacements beam wall column
Pathology cause of section reduction of a beam	2.0	$a_{4,5}$	3.0	Loss of adesion and detachment of finiscing (also spalling)
Pathology cause of section reduction of a beam	2.0	$a_{4,6}$	4	Excessive deflection, deformations or displacements beam wall column
Pathology cause of section reduction of a beam	3.0	$a_{4,7}$	7	Heavy foundation problem
Loss of adesion and detachment of finiscing (also spalling)	1.0	$a_{5,6}$	3	Excessive deflection, deformations or displacements beam wall column
Loss of adesion and detachment of finiscing (also spalling)	1.0	$a_{5,7}$	3.0	Heavy foundation problem
Loss of adesion and detachment of finiscing (also spalling)	3.0	$a_{5,8}$	5	Medium cracs or steel enervation beam column or non structural steal element
Excessive deflection, deformations or displacements beam wall column	1.0	$a_{6,7}$	3	Heavy foundation problem
Excessive deflection, deformations or displacements beam wall column	3.0	$a_{6,8}$	5	Medium cracs or steel enervation beam column or non structural steal element
Excessive deflection, deformations or displacements beam wall column	3.0	$a_{6,9}$	5	Component deformation beam column or wall
Heavy foundation problem	3.0	$a_{6,8}$	5	Medium cracs or steel enervation beam column or non structural steal element
Heavy foundation problem	3.0	$a_{6,9}$	5	Component deformation beam column or wall
Heavy foundation problem	3.0	$a_{6,10}$	6	Generic thin cracks of defects at junctions
Medium cracs or steel enervation beam column or non structural steal element	1	$a_{8,9}$	6	Component deformation beam column or wall
Medium cracs or steel enervation beam column or non structural steal element	5	$a_{8,10}$	6	Generic thin cracks of defects at junctions
Medium cracs or steel enervation beam column or non structural steal element	5	$a_{8,11}$	6	Decay phenomena superficiali
Component deformation beam column or wall	4	$a_{9,10}$	5	Generic thin cracks of defects at junctions
Generic thin cracks of defects at junctions	1	$a_{10,11}$	2	Decay phenomena superficiali
Decay phenomena superficiali	1	$a_{11,12}$	2	Wood or steel patology (not heavy)
Wood or steel patology (not heavy)	1	$a_{12,13}$	2	Medium settlement or differential settlement

Figure 9. Judgement Range for the alternatives of the criterion Severity of pathology.

The described procedure is repeated to obtain the weights w'_2 of the alternatives of criterion pathology extension and the weights w'_3 of the alternatives of criterion criticality height above walking surface. Finally, weight of criteria $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ with respect to the objective are determined.

Fig. 10 shows all the weights obtained by the O-AHP application.

$= 0.0174 < 0.1$, pertanto secondo la teoria di Saaty i valori della matrice A_1 sono identificati coerentemente. La procedura descritta è ripetuta per ottenere i pesi w'_2 delle alternative appartenenti al criterio estensione della patologia ed i pesi w'_3 delle alternative del criterio altezza della criticità rispetto al piano di calpestio. Infine, si determinano i valori λ_1, λ_2 e λ_3 , ovvero i pesi di ogni criterio

Severity of pathology $\lambda_1 = 0.57$	w_1'	Pathology extention $\lambda_1 = 0.29$	w_2'	Criticality height above walking surface $\lambda_1 = 0.14$	w_3'
Cracks active, cracs wide of column beam or Walls leaning out of vertical	10.0	100%	10.0	More than 4m	10
Broken brick blocks and heavy finiscing falling down	9.5	90%	9.0	Between 3m and 4m	6.9
Heavy expulsion of concrete cover and rebars oxidation	7.1	80%	8.0	Between 2m and 3m	2.9
Pathology cause of section reduction of a beam	6.7	70%	7.0	Between 1.5m and 2m	0.8
Loss of adesion and detachment of finiscing (also spalling)	3.5	60%	6.0	less than 1.5m	0.8
Excessive deflection, deformations or displacements beam wall column	3.7	50%	5.0		
Heavy foundation problem	3.8	40%	4.0		
Medium cracs or steel enervation beam column or non structural steal element	2.0	30%	3.0		
Component deformation beam column or wall	1.7	20%	2.0		
Generic thin cracks of defects at junctions	0.7	10%	1.0		
Decay phenomena superficiali	0.8				
Wood or steel patology (not heavy)	1.0				
Medium settlement or differential settlement	1.0				

Figure 10. weights obtained by the O-AHP application.

4.1 THE GLOBAL WEIGHT OF THE REPORTED PATHOLOGIES

The obtained weights quantify the safety compromise identification due to the building pathologies reported by the DSS.

Let us consider a structure decomposed in a set $F = \{f = I, \dots, N_f\}$ of components

rispetto all'obiettivo. Tutti i pesi ottenuti dall'applicazione della procedura O-AHP sono schematizzati in Fig. 10.

4.1. IL PESO GLOBALE DELLE PATOLOGIE RILEVATE

I pesi ottenuti hanno lo scopo di quantificare la diminuzione di sicurezza dovuto alle patologie dell'edificio rilevate dal DSS. Si considera una

classes (shear wall, column, beam, etc.) and a set $E=\{e=1,\dots,N_E\}$ of possible components. Subsequently, a report is generated on the basis of the visual analysis for each building's pathology: every report is composed of a photographic survey and additional structured information, organized in the set of *alternatives*.

For each reported pathology, the *DSS* can obtain a numerical value for each report that quantifies the building safety compromise (Cr_e) by exploiting the following formula:

$$Cr_e = \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 + \lambda_3 w_3 \quad (6)$$

where Cr_e is the index associated to the e -th component and ranges from 0 to 10, λ_1, λ_2 e λ_3 are the weights of the criteria, and w_1, w_2 e w_3 are the weights associated to the alternatives according to Fig. 10.

To provide an example a report composed by "Cracks active, wide of column beam or Walls leaning out of vertical", extended for 100% of the element and positioned at a height greater than 4 meters above walking surface results:

$$Cr_e = 0,75*10 + 0,29*10 + 0,14*10 = 10.$$

Cr_e is the maximum criticality value obtainable from the reports for the e -th component.

The synthetic index that quantifies the deterioration of the f -th class of components, named *component condition rating* of class f (CCr_f), is calculated by aggregating the values of Cr_e representing the *criticality condition rating* of component e belonging to the same f -th class (obtained by eq. (6)). More precisely, the value of CCr_f is computed as follows:

$$CCr_f = \frac{\sum_e Cr_e}{\gamma_k * S_{tot}} \quad (7)$$

where S_{tot} is the building total area and γ_k is the approximated evaluation of the number of the considered components per square meter [17]. The sum in eq. (7) includes the subset of components e related to class f . Finally, the degree of deterioration of the whole structure (BCr) is calculated by aggregating the values of Cr_e associated to all the elements belonging to the same building through the following expression:

$$BCr = \frac{\sum_{e=1}^{N_E} Cr_e}{\gamma_b * S_{tot}} \quad (8)$$

where S_{tot} is the building total area and γ_b is the approximated evaluation of the number of the components per square meter, evaluated for the specific R.C. building typology [17].

struttura precedentemente esaminata e scomposta in insiemi di classi di componenti $F=\{f=1,\dots,NF\}$ (muri a taglio, colonne, travi, etc.) e insiemi di possibili componenti $E=\{e=1,\dots,NE\}$. I report ottenuti grazie al DSS, sono composti da un rilievo fotografico e da ulteriori informazioni strutturate in un insieme di alternative. Per ogni patologia considerata, il DSS è in grado di ottenere un indice numerico che quantifica la compromissione di sicurezza (Cr_e) sfruttando la seguente formula:

$$Cr_e = \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 + \lambda_3 w_3 \quad (6)$$

dove Cr_e è l'indice associato al e -esimo component e varia da 0 a 10, λ_1, λ_2 e λ_3 sono i pesi associati ai criteri, w_1, w_2 e w_3 sono i pesi associati alle alternative in accordo a Fig. 10. Per esempio, un report composto da "Fessure gravi e attive o deformazione fuori piombo di travi colonne o muri", esteso al 100% dell'elemento e posizionate a più di 4 metri di altezza rispetto al piano di calpestio, risulta avere un indice Cr_e come segue:

$$Cr_e = 0,75*10 + 0,29*10 + 0,14*10 = 10$$

Per ottenere un indice che quantifichi la sicurezza della f -esima classe di componenti, nominato component condition rating della classe f (CCr_f), si aggregano i risultati dei singoli $Cr_e(6)$ appartenenti alla stessa classe di componenti f . Più precisamente il CCr_f è calcolato come segue:

$$CCr_f = (\sum_e Cr_e) / (\gamma_k * S_{tot}) \quad (7)$$

dove S_{tot} è l'area totale dell'edificio e γ_k è una valutazione approssimata del numero di componenti della tipologia considerata per metro quadro [17]. Infine, il livello di sicurezza dell'intero edificio (BCr) è calcolato aggregando tutti i valori Cr_e di tutti gli elementi e classi di elementi di uno stesso edificio tramite la seguente espressione:

$$BCr = (\sum_{e=1}^{N_E} Cr_e) / (\gamma_b * S_{tot}) \quad (8)$$

dove S_{tot} è l'area totale dell'edificio e γ_b è una valutazione approssimata del numero di componenti dell'edificio per metro quadro [17].

5. CONCLUSIONI

Il presente lavoro propone un DSS che offre un supporto nell'analisi prestazionale degli edifici utilizzando formulazioni matematiche ed algoritmi per la quantificazione di tali performance. In tale sistema, la metodologia utilizzata diventa di cruciale importanza per individuare i criteri di pesatura delle patologie edilizie. Questo lavoro riassume le principali fasi teoriche-procedurali e mostra un'applicazione nel campo dell'edilizia della metodologia denominata Optimized AHP (O-AHP) [16]. Tale metodologia permette di utilizzare l'AHP anche in presenza di sistemi ampi che prevedono l'analisi di un gran numero di alternative, condizione che causa un'oggettiva difficoltà nel raggiungimento della consistenza e quindi di risultati accettabili.

5. CONCLUSIONS

The paper presents a *DSS* that supports the buildings performance analysis by using mathematical formulations and algorithms for the performance index quantification. In such system the used mathematical methodology is crucial to identify criteria and weighing system to quantify building damages.

This work discusses the main procedural phases of the methodology called *Optimized AHP* [16] and shows an application in the building field. This methodology allows applying the *AHP* methodology even if a large number of criteria and comparisons are necessary and the consistency is not easy to be obtained.

Moreover, from the mathematical point of view, the reliability and coherence of the resulting weights evaluated by the *judgement matrix* are critical issues when the number of alternatives increases and the standard *AHP* is applied.

The proposed methodology overcomes the standard *AHP* drawbacks by revising the *AHP* weights evaluation procedure. Firstly, the exact judgement assignments are replaced by judgment ranges. Secondly, the entries of the judgement matrix are provided by a *MP* formulation that minimizes the inconsistency of the matrix subject to the constraints imposed on the weights.

In particular, the *O-AHP* methodology is used to quantify the safety compromises due to the reinforced concrete building pathologies also by employing the parameters obtained by the *DSS*. In this context a large number of alternatives have to be considered and the standard *AHP* provides an inconsistent matrix. On the contrary, the application of the *O-AHP* allows obtaining consistent results.

Future research will apply the *O-AHP* to analyse the safety performance in relation with the seismic behaviour by improving the number of pathologies considered in the analysis.

6. REFERENCES

- [1] Øien, K., Utne, I. B., & Herrera, I. A. (2011). Building safety indicators: Part 1—theoretical foundation. *Safety science*, 49(2), 148-161.
- [2] Sangiorgio, V., Uva, G., & Fatiguso, F. (2016). “A procedure to assess the criticalities of structures built in absence of earthquake resistant criteria.” *Congreso Euro-Americano Rehabend 2016 “Patología de la Construcción, Tecnología de la Rehabilitación y Gestión del*
- [3] Saaty, T. L., and Vargas, L. G. (2001). “The seven pillars of the analytic hierarchy process.” *Models, methods, concepts and applications of the analytic hierarchy process.*, 27-46. Springer US.
- [4] Barzilai, J., Cook, W. D., and Golany, B. (1987). “Consistent weights for judgements matrices of the relative importance of alternatives.” *Operations research letters*, 6(3), 131-134.
- [5] Saaty, T. L., and Hu, G. (1998). Ranking by eigenvector versus other methods in the analytic hierarchy process. *Applied Mathematics Letters*, 11(4), 121-125.
- [6] Saaty, T. L. (2003). “Decision-making with the AHP: Why is the principal eigenvector

Dal punto di vista matematico, l'affidabilità e la coerenza dei pesi risultanti della *matrix of judgements* è critica quando il numero di alternative è elevato. L'*O-AHP* utilizzata in questo lavoro supera le limitazioni dell'*AHP* con due aspetti metodologici. In primo luogo, le assegnazioni esatte dei giudizi vengono sostituite da intervalli di giudizio ed è possibile omettere i giudizi che risultano incerti per il *Decision Maker*. In secondo luogo, gli elementi della *matrix of judgements* sono ottenuti risolvendo un problema di programmazione matematica che minimizza l'incoerenza della matrice attraverso dei vincoli ottenuti dai *Judgement Ranges*. In particolare, la metodologia dell'*O-AHP* [16] è utilizzata per quantificare la misura in cui le patologie edilizie di edifici a scheletro indipendente comportano una compromissione della sicurezza degli utenti. Più precisamente si affronta il problema di quantificare la misura in cui la sicurezza viene compromessa da specifiche patologie edilizie sulla base dei parametri ottenibili da un *DSS* [11]. In questo contesto devono essere considerati un gran numero di elementi e il metodo classico risulterebbe difficile da applicare per ottenere una matrice coerente. Al contrario, l'applicazione dell'*O-AHP* permette di ottenere i pesi di ogni criterio e di ogni possibile alternativa rispetto al criterio e di superare la verifica di consistenza attraverso l'ottimizzazione matematica. I prossimi passi della ricerca saranno rivolti all'applicazione dell'*O-AHP* per le prestazioni di sicurezza dell'edificio in relazione al comportamento sismico ed al potenziamento dell'applicazione attuale incrementando il numero delle patologie considerate nella valutazione del rischio.

- necessary." *European journal of operational research*, 145(1), 85-91.
- [7] Saaty, T. L., and Vargas, L. G. (1984). "Inconsistency and rank preservation." *Journal of Mathematical Psychology*, 28(2), 205-214.
- [8] Saaty, T. L. (1990). *Decision making for leaders: the analytic hierarchy process for decisions in a complex world*, RWS publications.
- [9] Saaty, T. L. (1977). "Scaling method for priorities in hierarchical structures." *J. Math. Psychol.*, 15(3), 234-281.
- [10] Li, F., Phoon, K. K., Du, X., and Zhang, M. (2013). "Improved AHP method and its application in risk identification." *Journal of Construction Engineering and Management*, 139(3), 312-320.
- [11] Sangiorgio, V., Uva, G., and Fatiguso, F. (2016). "Development of an innovative quality detection platform for reinforced concrete school buildings: an app for large scale supervising." *Proceedings of the 4rd Workshop "The New Boundaries of Structural Concrete"*, Capri.
- [12] Saaty, T. L. (1980). *The analytical hierarchy process: Planning, priority setting, resource allocation*, McGraw-Hill, London, England.
- [13] Saaty, T. L. (2008). "Decision making with the analytic hierarchy process." *International journal of services sciences*, 1(1), 83-98.
- [14] Ishizaka, A., and Lusti, M. (2006). "How to derive priorities in AHP: a comparative study." *Central European Journal of Operations Research*, 14(4), 387-400.
- [15] Noble, E. E., and Sanchez, P. P. (1993). A note on the information content of a consistent pairwise comparison judgment matrix of an AHP decision maker. *Theory and Decision*, 34(2), 99-108.
- [16] Sangiorgio, V., Uva, G., & Fatiguso, F. (2017) Optimized AHP to Overcome Limits in Weight Calculation: a Building Performance Application. *Journal of Construction Engineering and Management*.
- [17] Sangiorgio, V., Uva, G., & Fatiguso, F. (2018). User-Reporting Based Semeiotic Assessment Of Existing Building Stock At The Regional Scale. *Journal of Performance of Constructed Facilities*.